

Задача о стоянке такси у гостиницы

Задача была опубликована Ники ван Фористом (Nicky D. van Foreest) в учебнике по теории очередей, которую он преподаёт в одном из университетов Нидерландов. Постановка задачи в переводе несколько сократилась, но суть осталась прежней. В таком виде она была представлена студентам факультета прикладной математики — процессов управления.

Задача. На стоянку такси у гостиницы прибывают пассажиры со средней частотой 12 человек в час. Каждый человек уезжает на отдельной машине. Машины подвезжают к стоянке со средней частотой 15 машин в час. Промежутки времени прибытия и машин, и пассажиров распределены по экспоненциальному закону. На стоянке есть места только для трёх машин. Если все места заняты, машина уезжает без пассажира. Считается, что пассажиры мгновенно садятся в такси, и машина сразу покидает стоянку, поэтому не может быть одновременно двух очередей из машин и людей. Длина очереди пассажиров не ограничена. Каковы вероятности состояний системы?

Под состоянием системы понимается пара целых чисел (i, j) , равных длинам очередей машин или людей соответственно, из которых хотя бы одно равно нулю.

Вывести формулы, зависящие от частот прибытия и мест на стоянке машин.

Решение. Не умаляя общности можно считать, что состояния системы ограничены не только длиной очереди машин, но и длиной очереди пассажиров. Так как при любом состоянии системы по условию задачи числа i и j не могут одновременно принимать значения отличные от нуля, то состояния можно перенумеровать от $-m$ до n , где нулевым состоянием будет $(0, 0)$, при этом $(m, 0)$ — состояние с наибольшей допустимой длиной очереди машин с номером $-m$, а $(0, n)$ — состояние с наибольшей допустимой длиной очереди людей с номером n . Для ответа на вопрос задачи нужно будет рассмотреть поведение системы при $n \rightarrow \infty$.

Поскольку граф состояний не имеет ветвлений, то можно утверждать, что если система перешла из состояния k в состояние $k + 1$, то вернуться в состояние k она сможет только из состояния $k + 1$, а также, если система перешла из состояния k в состояние $k - 1$, то вернуться в состояние k она сможет только из состояния $k - 1$. Это позволит упростить систему уравнений для вероятностей состояний.

Если обозначить среднюю частоту прибытия машин за μ , а пассажиров за λ , то средние промежутки времени между прибытиями будут $1/\mu$ и $1/\lambda$ соответственно. Каждое прибытие машины уменьшает номер состояния системы на 1, а прибытие пассажира — увеличивает на 1, если только состояние системы не является соответственно наименьшим или наибольшим из допустимых. Если рассматривать систему на достаточно большом, но конечном промежутке времени T , то прибытий машин будет примерно μT , а пассажиров — λT . То есть, отношение прибывших пассажиров к числу прибывших машин будет стремиться к λ/μ при стремлении T к бесконеч-

ности. Число переходов системы из состояния k в состояние $k + 1$ должно совпадать с числом обратных переходов из состояния $k + 1$ в состояние k , в противном случае система никогда не сможет вернуться в состояния с номерами не превосходящими k или не меньшими $k + 1$, если переходы "наверх" соответственно больше или меньше переходов "вниз". Так как машины прибывают чаще пассажиров, то уравновесить число переходов "вверх" и "вниз" может только то, что суммарное время нахождения системы в состоянии k больше суммарного времени нахождения системы в состоянии $k + 1$. Отношение суммарного времени нахождения системы в некотором состоянии k к общему времени T и есть вероятность нахождения системы в этом состоянии p_k .

Поскольку промежутки времени между прибытиями и машин, и пассажиров распределены экспоненциально, то число переходов из некоторого состояния k как в состояние $k - 1$ так и в состояние $k + 1$ зависит только от суммарной продолжительности нахождения системы в этом состоянии и не зависит от того, каковы длительности отдельных промежутков времени нахождения системы в этом состоянии между нахождениями её в других состояниях.

Таким образом, система уравнений может выглядеть так:

$$\lambda p_k = \mu p_{k+1}, \quad \text{где } k = \overline{-m, n-1}, \quad \text{то есть } p_{k+1} = \frac{\lambda}{\mu} p_k, \quad \text{или } p_k = \frac{\mu}{\lambda} p_{k+1}.$$

Откуда можно выразить все вероятности через p_0 :

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \quad \text{для } k > 0, \quad \text{и } p_k = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^k p_0, \quad \text{для } k < 0.$$

Так как

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{-k},$$

то

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \quad \text{где } k = \overline{-m, n-1}.$$

Поскольку сумма всех вероятностей должна быть единичной, то

$$\sum_{k=-m}^n p_k = 1, \quad \text{то есть } \sum_{k=-m}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 = 1, \quad \text{откуда } p_0 \cdot \sum_{k=-m}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1.$$

Получается выражение для p_0 :

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=-m}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}.$$

Таким образом выражения для p_k выглядят так:

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{l=-m}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l}. \quad (1)$$

При $n \rightarrow \infty$ последнее выражение примет вид

$$p_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=-m}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j} = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=-m}^{-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + e^{\frac{\lambda}{\mu}}}.$$

Теперь можно вычислить значения вероятностей состояний для заданных значений. При $\lambda = 12$, $\mu = 15$, $m = 3$, $n = 100$ получается

$$\begin{aligned} p_{-3} &= 0.2000000000166873 \\ p_{-2} &= 0.16000000001334985 \\ p_{-1} &= 0.1280000000106799 \\ p_0 &= 0.10240000000854392 \\ p_1 &= 0.08192000000683515 \\ p_2 &= 0.06553600000546812 \\ p_3 &= 0.0524288000043745 \end{aligned}$$

Примечательно то, что увеличение числа мест для стоянки такси на 1 на деле не меняет значений вероятностей состояний, они лишь смещаются вниз. То есть p_k при $m = 3$ равняется p_{k-1} при $m = 4$. Компьютерное моделирование при десяти миллионах смен состояний системы подтверждает теоретический результат с точностью до четвёртого знака после запятой. Если пересчитать значения вероятностей при $n = \infty$, то их значения незначительно (в третьем знаке) уменьшатся, но на деле лучше согласуются значения, вычисленные при $n = 100$, поскольку в таких испытаниях очередь людей никак не доходит до ста человек.

Формула $p_k = \rho^k(1 - \rho)$, где $\rho = \lambda/\mu$ для этой задачи тоже верна, как и для М/М/1. Действительно, из формулы (1) можно выразить все вероятности состояния через вероятность состояния с наименьшим номером: $p_k = p_{-m} \cdot \rho^{k+m}$. Знаменатель формулы (1), можно преобразовать домножением и делением на $(1 - \rho)$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=-m}^n \rho^l &= \sum_{l=0}^{n+m} \rho^{l-m} = \sum_{l=0}^{n+m} \rho^l \rho^{-m} = \rho^{-m} \sum_{l=0}^{n+m} \rho^l = \\ &= \rho^{-m}(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{n+m-2} + \rho^{n+m-1} + \rho^{n+m}) = \\ &= \frac{\rho^{-m}(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \dots + \rho^{n+m-2} + \rho^{n+m-1} + \rho^{n+m})(1 - \rho)}{(1 - \rho)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho^{-m}(1 - \rho + \rho - \rho^2 + \dots + \rho^{n+m-1} - \rho^{n+m} + \rho^{n+m} - \rho^{n+m+1})}{(1 - \rho)} = \\
&= \frac{\rho^{-m}(1 - \rho^{n+m+1})}{(1 - \rho)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\rho^{-m}}{(1 - \rho)}
\end{aligned}$$

Так как $p_k = p_{-m} \cdot \rho^{k+m}$, то, подставляя полученное значение для знаменателя формулы (1), выходит

$$p_k = \rho^{-m} \cdot \frac{(1 - \rho)}{\rho^{-m}} \cdot \rho^{k+m} = \rho^{k+m} \cdot (1 - \rho).$$

Для $k = -m$ получается $p_{-m} = 1 - \rho$. То есть, если нумеровать состояния не от $-m$, а от нуля, то как раз и получится формула, применённая в учебнике Nicky D. van Foreest. То есть, последовательность вероятностей состояний от младшего к старшему не зависит от числа мест на стоянке. Вероятность застать полностью заполненную стоянку всегда будет равна $1 - \rho$.

По этой формуле значения вероятностей можно получить с меньшими погрешностями вычислений. При $\lambda = 12$, $\mu = 15$, $m = 3$, $n = \infty$ получается

$$\begin{aligned}
p_{-3} &= 0.2 \\
p_{-2} &= 0.16 \\
p_{-1} &= 0.128 \\
p_0 &= 0.1024 \\
p_1 &= 0.08192 \\
p_2 &= 0.065536 \\
p_3 &= 0.0524288
\end{aligned}$$

Любопытно, что если задать равными λ и μ , то все состояния станут равновероятными. При этом, если устремить допустимую длину какой либо из двух очередей к бесконечности, то вероятности всех состояний устремятся к нулю.

Задача могла бы существенно усложниться, если бы время посадки пассажира в такси и его отъезд со стоянки не были бы мгновенными, а являлись бы случайным положительным числом с заданным математическим ожиданием. В этом случае очереди из машин и людей могли бы одновременно иметь ненулевые значения, граф состояний не был бы линейным, имел бы ветвления, и система уравнений для вероятностей состояний была бы сложнее. В такой постановке получить общую формулу для всех вероятностей не удаётся, но задача решается численными методами или имитационным моделированием на компьютере.

Среднее время ожидания. Для того, чтобы вычислить среднюю длину очереди, состоящую из машин, нужно сложить вероятности состояний, умноженных на длину очереди, соответствующей этому состоянию.

$$L_c = \sum_{i=1}^m i p_{-i} = 1 \cdot 0.128 + 2 \cdot 0.160 + 3 \cdot 0.200 = 1.048.$$

Чтобы получить среднее время ожидания в очереди, нужно умножить среднюю длину очереди, на средний промежуток времени, за который из очереди выходит первый стоящий в ней. А этот промежуток равен среднему промежутку времени между приходами новых пассажиров, который составляет $1/\lambda$.

$$W_c = \frac{L_c}{\lambda} = \frac{1.048}{12} = 0.0873333333333333.$$

Для вычисления средней длины очереди пассажиров было взято ограничение очереди пассажиров до ста мест. В этом случае

$$L_r = \sum_{i=1}^{100} ip_i = 2.048.$$

Как оказалось, чтобы получить среднее время ожидания пассажиром автомобиля такси нужно умножить среднюю длину очереди на среднее время прибытия пассажира, что совсем не очевидно. Естественно было бы предположить, что очередь пассажиров убывает со скоростью, равной среднему числу прибывающих машин в единицу времени. Но, как оказалось, это не так. Дело в том, что не все прибывающие машины учитываются. Часть уезжает без пассажиров, поэтому при стремлении времени наблюдения к бесконечности отношение числа машин, уехавших с пассажиром, к числу пассажиров стремится к 1. В противном случае очередь становилась бы бесконечно длинной. Поэтому и средняя частота прибытия машин, которые уедут потом с пассажирами равна средней частоте прибытия пассажиров. Можно получить это путём более подробных рассуждений.

Действительно, если время наблюдения конечное, равное T , то среднее время ожидания вычисляется как отношение суммарного времени ожидания всех пассажиров к числу всех пассажиров.

Суммарное время ожидания всех пассажиров является суммой произведений промежутков времени между сменами состояний и длинами очередей, соответствующей этим состояниям. В самом деле, если на промежутке времени от t_i до t_{i+1} длина очереди из r пассажиров не изменялась (машины не подъезжали), то каждый из этих r пассажиров ждал $t_{i+1} - t_i$ единиц времени. То есть, суммарное время ожидания составляло $(t_{i+1} - t_i) \cdot r$ единиц времени. Обозначив суммарное время ожидания всех пассажиров за W_Σ , а промежуток времени $t_{i+1} - t_i$ между сменами состояний за δt_i получим формулу

$$W_\Sigma = \sum_{i=0}^w \delta t_i r_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=0}^w \delta t_i = T,$$

r_i — длина очереди пассажиров на промежутке δt_i , w — число изменений длины очереди пассажиров за время T .

Если в этой формуле собрать вместе слагаемые с одинаковыми длинами очередей, то получится

$$W_\Sigma = \sum_{l=0}^s \Delta t_l l,$$

где Δt_l — суммарное время нахождения системы в состоянии с длиной очереди пассажиров l , а s — наибольшая длина очереди пассажиров, наблюдавшаяся за время T . Если правую часть полученной формулы умножить и разделить на T , то выйдет

$$W_{\Sigma} = T \cdot \sum_{l=0}^s p_l l = T \cdot L_r,$$

где p_l — вероятности нахождения системы в состоянии с длиной очереди пассажиров l , а L_r — средняя длина очереди пассажиров за время T . Разделив суммарное время ожидания всех пассажиров W_{Σ} на число всех пассажиров R , получилось среднее время ожидания одного пассажира W_r .

$$W_r = \frac{W_{\Sigma}}{R} = \frac{T}{R} \cdot L_r = \frac{L_r}{\lambda},$$

ибо T/R есть среднее время между прибытиями пассажиров за время T , то есть, величина, обратная частоте прибывания пассажиров λ . Отсюда

$$W_r = \frac{2.048}{12} = 0.170666666666667$$

Если увеличить вместимость стоянки такси до четырёх машин, то

$$L_c = \sum_{i=1}^m i p_{-i} = 1 \cdot 0.1024 + 2 \cdot 0.128 + 3 \cdot 0.160 + 4 \cdot 0.200 = 1.6384.$$

Что, в целом, согласуется с числами, приведёнными в учебнике Nicky D. van Foreest.

Результаты были проверены на компьютерной модели, отображающую описанную систему в работе.