

Система массового обслуживания без ожидания

Рассмотрим систему массового обслуживания с входящим Пуассоновым потоком заявок на обслуживание мощностью λ . Система имеет n приборов обслуживания. Среднее время обслуживания каждой заявки равно $1/\mu$ вне зависимости от того, каким прибором обслуживается заявка, при этом время обслуживания распределено экспоненциально, и $\lambda < n\mu$. Заявки не становятся в очередь, то есть, если пришедшая заявка на обслуживание застаёт все приборы занятыми, то заявка покидает систему необслуженной. Величина $n\mu$ называется пропускной способностью (производительностью) системы, и равна числу заявок, которые система может обслужить в единицу времени при полной загрузке. В записи Кендалла такая система обозначается $M/M/n/n+0$. Система может находиться в $n+1$ состояниях, которые нумеруются от 0 до n , и номер состояния соответствует числу занятых приборов. Нужно вычислить вероятность застать систему в каждом из состояний, при этом особое значение имеет вероятность последнего состояния, поскольку это есть вероятность для заявки остаться необслуженной.

Пусть в течение некоторого времени T система находится под наблюдением. При этом суммарное время нахождения системы в каждом состоянии есть t_k , где k — номер состояния. За время нахождения системы в состоянии k ожидается поступление λt_k заявок. При поступлении заявки, если $k < n$, система переходит в состояние $k+1$. С другой стороны, если $k > 0$ то каждый занятый прибор μt_k раз в среднем завершает обслуживание заявок и освобождается. То есть, ожидается $k\mu t_k$ переходов из состояния k в состояние $k-1$. Очевидно, что число переходов между соседними состояниями туда и обратно не может отличаться более, чем на 1

$$\lambda t_{k-1} = k\mu t_k + \delta, \quad \delta \in \{-1, 0, 1\}, \quad k = \overline{1, n}.$$

Поскольку производительность системы превосходит мощность входящего потока, то система время от времени будет полностью освобождаться от заявок, то есть, возвращаться к нулевому состоянию. Если устремить время наблюдения T к бесконечности все t_k тоже устремятся к бесконечности, а значит и число переходов устремятся к бесконечности. Если разделить обе части всех уравнений системы на T , то $\delta/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$. Отношение t_k/T , есть доля времени нахождения системы в состоянии k , то есть вероятность застать систему в этом состоянии, которую обозначим p_k . Таким образом, можно составить систему уравнений

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2,$$

$$\lambda p_2 = 3\mu p_3,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\lambda p_{n-1} = n\mu p_n.$$

Выражая все вероятности через p_0 и учитывая то, что сумма вероятностей всех состояний равна единице получим систему из $n+1$ уравнений

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0,$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_1 = \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3 \cdot \mu^3} p_0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0,$$

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1.$$

Подставляя в последнее уравнение выражения для вероятностей, получим

$$\sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i! \mu^i} p_0 = 1.$$

Откуда, вынося общий множитель за знак суммы

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^n \frac{\lambda^i}{i! \mu^i}}.$$

И, подставляя полученное выражение в уравнения для вероятностей состояний, получаем формулы для вероятностей всех состояний

$$p_k = \frac{\rho^k}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}}, \quad \text{где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad k = \overline{0, n}.$$

При $k = n$ вероятность p_n — вероятность застать систему полностью занятой, то есть, вероятность того, что входящая заявка покинет систему неослуженной. Эти формулы были получены Ангером Крарупом Эрлангом (Agner Kragur Erlang) для расчёта доли неудач при попытках связаться с телефонной станцией. Их называют формулами Эрланга.