## Система массового обслуживания с несколькими приборами и произвольной очередью

Рассмотрим систему массового обслуживания с $n$ обслуживающими приборами и наибольшей допустимой длиной очереди $m$. Состояния системы различаются числом заявок в системе. Пусть это число и будет номером состояния. При нулевом состоянии заявок в системе нет, все приборы свободны. При первом состоянии очередь пуста и одна заявка находится в обработке. Если заявка приходит, когда система находится в первом состоянии, заявка принимается в обслуживание вторым прибором и так далее до состояния $n$. Если заявка пришла, когда система находится в состоянии $n$, заявка становится в очередь и система переходит в состояние $n+1$. И далее, если заявка пришла, когда система в состоянии $k : n \leq k < n + m$, то система перейдёт в состояние $k + 1$. Если заявка застала систему в состоянии $n + m$, то заявка немедленно покидает систему и остаётся необслуженной. Если прибор закончил обслуживание заявки, когда система находилась в состоянии $k$, то заявка покидает систему, система переходит в состояние $k - 1$, а прибор берёт в обслуживание первую в очереди заявку, если таковые имеются, или ждёт прихода новой заявки в систему, если в очереди заявок нет.

Пусть входящий поток заявок является Пуассоновым мощности $\lambda$, то есть за время $t$ в среднем приходит $\lambda t$ заявок на обслуживание. Среднее время обслуживания каждой заявки равно $1/\mu$ вне зависимости от того, каким прибором обслуживается заявка, при этом время обслуживания распределено экспоненциально, и $\lambda < n\mu$. Величина $n\mu$ называется пропускной способностью (производительностью) системы, и равна числу заявок, которые система может обслужить в единицу времени при полной загрузке, то есть, когда очередь не пуста. В записи Кендалла такая система обозначается M/M/n/n+m.

Используя рассуждения подобные тем, что были использованы при рассмотрении системы M/M/n/n+0, получим уравнения переходов между состояниями. Множитель в правых частях соответствует числу занятых серверов в этом состоянии.

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1, \\
\lambda p_1 &= 2\mu p_2, \\
\lambda p_2 &= 3\mu p_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda p_{n-1} &= n\mu p_n, \\
\lambda p_n &= n\mu p_{n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda p_{n+m-1} &= n\mu p_{n+m},
\end{aligned}$$

Выражая все вероятности через вероятность нулевого состояния, получим выражения

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!\,\mu^k}\,p_0, \quad k = \overline{0, n},$$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{n!\,n^{k-n}\mu^k}\,p_0, \quad k = \overline{n+1, n+m}.$$

Откуда зная, что сумма вероятностей всех состояний единична, получим

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} p_0 + \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{\rho^j}{n!\,n^{k-n}}\,p_0 = 1, \qquad \text{где} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Вынесем общие множители за знаки суммирования

$$p_0 \sum_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + p_0 \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=1}^{m} \frac{\rho^j}{n^j} = 1,$$

Отсюда

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\, n} \sum\limits_{j=0}^{m-1} \left(\frac{\rho}{n}\right)^j}.$$

Знаменатель можно упростить, выразив значение второй суммы для $m > 0$.

$$\sum_{j=0}^{m-1} \sigma^j = \frac{1-\sigma^m}{1-\sigma}, \qquad \text{где} \quad \sigma = \frac{\rho}{n}$$

Тогда формулы для вероятностей всех состояний запишутся следующим образом

$$p_k = \frac{\rho^k}{k! \left( \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1-\sigma^m}{1-\sigma} \right)}, \qquad k = \overline{0, n}, \quad m > 0,$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{k-n} \left( \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \frac{1-\sigma^m}{1-\sigma} \right)}, \quad k = \overline{n+1, n+m}, \quad m > 0.$$

Если очередь не ограничена, то есть $m = \infty$, то формулы будут таковы

$$p_k = \frac{\rho^k}{k! \left( \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(1-\sigma)} \right)}, \qquad k = \overline{0, n},$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{n!\, n^{k-n} \left( \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(1-\sigma)} \right)}, \quad k = \overline{n+1, \infty},$$

если при этом положить ещё и $n = 1$, то формулы сведутся к тем, что получены для M/M/1, причём одна и та же формула получится и для случая, когда $0 \le k \le n = 1$, и для случая, когда $k > 1$;

$$p_k = \rho^k (1-\rho),$$

С другой стороны, если система без ожидания, то есть $m = 0$, то формулы сведутся к тем, что были получены для M/M/n/n+0. Действительно, для $k > n$ состояний нет, поэтому вторая строчка формул уходит. Для первой строчки, при $0 \le k \le n$ подставляем $m = 0$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k! \left( \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\, n} \sum\limits_{j=0}^{-1} \sigma^j \right)}, \quad k = \overline{0, n}.$$

Поскольку верхний индекс суммирования меньше нижнего, в сумме не будет ни одного слагаемого, то есть она равна нулю, и в знаменателе остаётся только первая сумма, что и даст нам знакомую формулу

$$p_k = \frac{\rho^k}{k! \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{\rho^i}{i!}}, \qquad k = \overline{0, n}.$$