Система массового обслуживания с одним прибором и неограниченной очередью

Рассмотрим систему массового обслуживания с неограниченной очередью и одним обслуживающим прибором. Состояния систмы различаются числом заявок в системе. Пусть это число и будет номером состояния. При нулевом состоянии заявок в системе нет, прибор свободен. При первом состоянии очередь пуста и одна заявка находится в обработке. Если заявка приходит, когда система находится в первом состоянии, заявка становится в очередь и система переходит во второе состоянии. И далее, если заявка пришла, когда система в состоянии k, то система перейдёт в состояние $k+1$. Если прибор закончил обслуживание заявки, когда система находилась в состоянии k, то заявка покидает систему, прибор берёт в обслуживание первую в очереди заявку, а система переходит в состояние $k-1$.

Пусть входящий поток заявок является Пуассоновым мощности λ, то есть за время t в среднем приходит λt заявок на обслуживание. Пусть производительность прибора равна μ, то есть при полной загрузке, когда очередь не пуста, прибор обслуживает μt заявок. При этом $\lambda < \mu$, время обслуживания распределено экспоненциально, а среднее время обслуживания равно $1/\mu$. В записи Кендалла такая система обозначается M/M/1. Используя рассуждения подобные тем, что были использованы при рассмотрении системы M/M/n/n+0, получим уравнения переходов между состояниями, с той лишь разницей, что в правых частях множитель везде единичный.

$$\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$\lambda p_1 = \mu p_2,$$

$$\lambda p_2 = \mu p_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda p_{k-1} = \mu p_k,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Выражая все вероятности через вероятность нулевого состояния, и зная, что сумма вероятностей всех состояний единична, получим уравнение

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i p_0 = 1, \qquad \text{где} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1.$$

Общий множитель p_0 выносится за знак суммы, а сумма вычисяется так

$$\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \rho^i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\rho+\rho^2+\cdots+\rho^n)(1-\rho)}{1-\rho} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-\rho)+(\rho-\rho^2)+(\rho^2-\rho^3)+\cdots+(\rho^n-\rho^{n+1})}{1-\rho} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\rho^{n+1}}{1-\rho} = \frac{1}{1-\rho}, \quad \text{откуда} \quad p_0 = 1-\rho.$$

Тогда формулы для вероятностей всех состояний запишутся так

$$p_k = \rho^k (1-\rho).$$