

Связь экспоненциального распределения и распределения Пуассона

Пусть есть случайная последовательность событий, подчиняющаяся распределению Пуассона с параметром λ . Как распределены промежутки времени между событиями? Построим интегральную функцию такого распределения.

$$F(t) = \mathbb{P}\{\xi < t\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi > t\} = 1 - P(0, \lambda, t) = 1 - \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Здесь использовано следующее рассуждение. Вероятность того, что промежутков времени между двумя событиями больше t , равен вероятности того, что на промежутке времени t нет ни одного события. Полученное выражение является интегральной функцией экспоненциального распределения. ■

Обратное тоже верно. Действительно, пусть есть случайная последовательность событий промежутки времени между которыми распределены экспоненциально с параметром λ . Какова вероятность того, что произойдут ровно k событий за промежуток времени длительностью t ? Для начала рассмотрим $k = 0$. Не произойдёт ни одного события за время t если промежутков времени между двумя событиями больше, чем t .

$$P(0, \lambda, t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda \tau} d\tau = -e^{-\lambda \tau} \Big|_t^\infty = e^{-\lambda t}.$$

Пусть $k = 1$. Только одно событие случится за время t если промежуток времени τ между двумя событиями меньше, чем t , и ни одного события больше не произойдёт за оставшееся время $t - \tau$.

$$\begin{aligned} P(1, \lambda, t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot P(0, \lambda, t - \tau) d\tau = \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} d\tau = \\ &= \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t d\tau = \lambda e^{-\lambda t} \cdot \left(\tau \Big|_0^t \right) = \lambda t e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Так же для $k = 2$.

$$\begin{aligned} P(2, \lambda, t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot P(1, \lambda, t - \tau) d\tau = \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot \lambda(t - \tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda t} \int_0^t (t - \tau) d\tau = \lambda^2 e^{-\lambda t} \cdot \left(t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right)_0^t = \frac{\lambda^2 t^2}{2} e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Далее используем математическую индукцию. Пусть

$$P(k - 1, \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t},$$

тогда

$$\begin{aligned} P(k, \lambda, t) &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot \frac{(\lambda(t - \tau))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t (t - \tau)^{k-1} d\tau = \\ &= -\frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \cdot \left(\frac{(t - \tau)^k}{k} \right)_0^t = -\frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \cdot \frac{-t^k}{k} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. ■