

Экспоненциальное распределение

Пусть n покупателей собираются посетить магазин в промежуток времени от 0 до T . Каждый из них выбирает время посещения случайно, то есть выбор каждого равномерно распределён на отрезке $[0, T]$. Как будут распределены промежутки времени между посещениями покупателей? Рассмотрим промежуток времени $[t_1, t_2]$, где $0 \leq t_1 < t_2 < T$ и $t_2 - t_1 = t$. Вероятность того, что покупатель i выберет время между t_1 и t_2 будет t/T , а вероятность того, что он не выберет это время, будет $1 - t/T$. Вероятность того, что n покупателей не придут в магазин в этот промежуток времени, такова:

$$\left(1 - \frac{t}{T}\right)^n.$$

Обозначим за λ дробь n/T и назовём её *средней частотой или интенсивностью*, которая показывает среднее число прибывающих покупателей в единицу времени. Пусть T и n устремляются к бесконечности с постоянной λ . Вероятность p_t того, что в промежуток времени t никто не придёт, будет

$$p_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t}.$$

По определению интегральной функции распределения $F(t)$ где t промежуток времени без прибытий покупателей, $F(t) = \mathbb{P}\{\xi < t\}$ где ξ случайное значение переменной t . Так как p_t есть вероятность того, что время между прибытиями двух покупателей больше, чем t , то $p_t = \mathbb{P}\{\xi > t\}$ и

$$F(t) = \mathbb{P}\{\xi < t\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi > t\} = 1 - p_t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Функция плотности $f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

Распределение Пуассона

Поставим вопрос предыдущей задачи по-другому. Какова вероятность того, что ровно k покупателей посетят магазин в произвольный промежуток времени длительностью t ?

Пренумеруем покупателей от 1 до n , и пусть покупатели с номерами от 1 до k придут в магазин в этот промежуток времени, а другие покупатели — в другое время. Вероятность такого события

$$p_{n,t,T}^{1,\dots,k} = \left(\frac{t}{T}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k}.$$

Отсюда вероятность того что любые k покупателей придут в магазин в промежуток t , будет

$$\begin{aligned} p_{k,n,t,T} &= C_n^k \cdot p_{n,t,T}^{1,\dots,k} = C_n^k \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

Пусть n и T стремятся к бесконечности с постоянным значением λ .

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{k,n,t,T} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n-k)! n^k} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{n-k+2}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+k}{n}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = P(k, \lambda, t). \end{aligned}$$