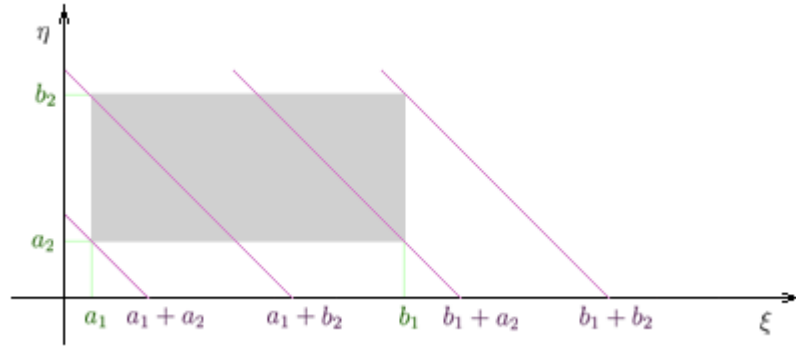


Сумма двух случайных величин, распределённых на ограниченных промежутках

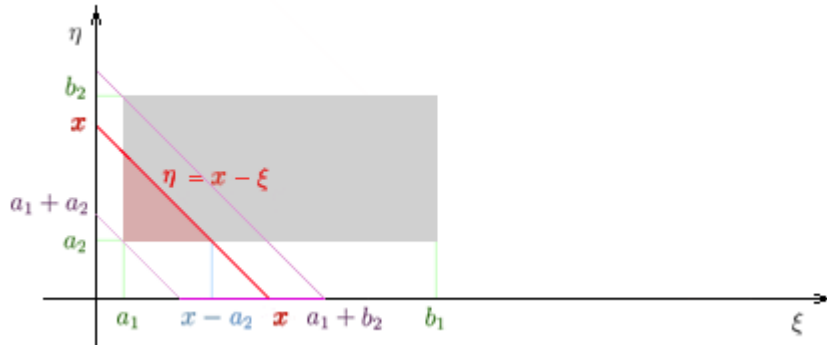
Пусть две случайные величины заданы на интервалах $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ соответственно. То есть интегральные функции распределения таковы, что $F_1(x) = 0$ при $x < a_1$ и $F_1(x) = 1$ при $x > b_1$; а $F_2(x) = 0$ при $x < a_2$ и $F_2(x) = 1$ при $x > b_2$. Не умаляя общности можно считать, что длина отрезка, на котором задана первая случайная величина, больше длины отрезка, на котором задана вторая случайная величина, то есть $b_1 - a_1 > b_2 - a_2$, откуда $a_1 + b_2 < b_1 + a_2$.

Случайная величина, являющаяся суммой этих двух случайных величин будет принимать значения на отрезке $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$, при этом нужно выделить три части этого отрезка: $[a_1 + a_2, a_1 + b_2]$, $[a_1 + b_2, b_1 + a_2]$, $[b_1 + a_2, b_1 + b_2]$.



Для первого отрезка $[a_1 + a_2, a_1 + b_2]$ интегральная функция распределения будет вычисляться по формуле:

$$G(x) = \int_{a_1}^{x-a_2} f_1(\xi) \int_{a_2}^{x-\xi} f_2(\eta) d\eta d\xi = \int_{a_1}^{x-a_2} f_1(\xi) \cdot (F_2(x-\xi) - F_2(a_2)) d\xi.$$



В силу того, что $F_2(a_2) = 0$, формула примет вид

$$G(x) = \int_{a_1}^{x-a_2} f_1(\xi) F_2(x-\xi) d\xi.$$

Плотность распределения получается дифференцированием интегральной функции.

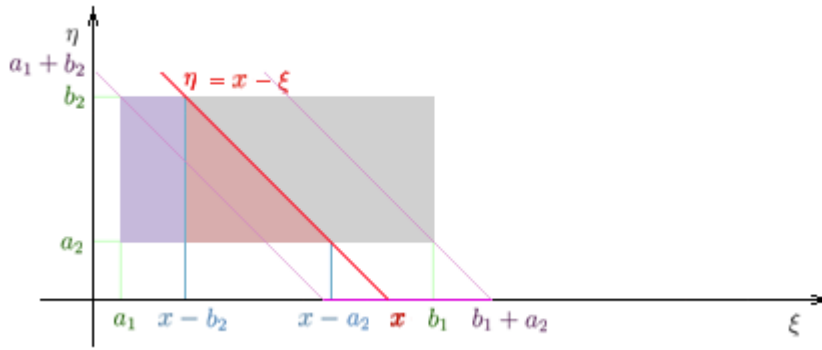
$$\begin{aligned} g(x) = \frac{dG(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \int_{a_1}^{x-a_2} f_1(\xi) F_2(x-\xi) d\xi = \int_{a_1}^{x-a_2} \frac{\partial}{\partial x} f_1(\xi) F_2(x-\xi) d\xi + \\ &+ f_1(x) F_2(x - (x - a_2)) \frac{d(x - a_2)}{dx} - f_1(x) F_2(x - a_1) \frac{da_1}{dx} \end{aligned}$$

В последнем слагаемом a_1 является постоянной, поэтому $da_1/dz = 0$, а в предпоследнем слагаемом $F_2(x - (x - a_2)) = F_2(a_2) = 0$, откуда получается

$$g(x) = \int_{a_1}^{x-a_2} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi.$$

Для второго отрезка $[a_1 + b_2, b_1 + a_2]$ интегральная функция распределения будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a_1}^{x-b_2} f_1(\xi) \int_{a_2}^{b_2} f_2(\eta) d\eta d\xi + \int_{x-b_2}^{x-a_2} f_1(\xi) \int_{a_2}^{x-\xi} f_2(\eta) d\eta d\xi = \\ &= \int_{a_1}^{x-b_2} f_1(\xi) \cdot 1 d\xi + \int_{x-b_2}^{x-a_2} f_1(\xi) F_2(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

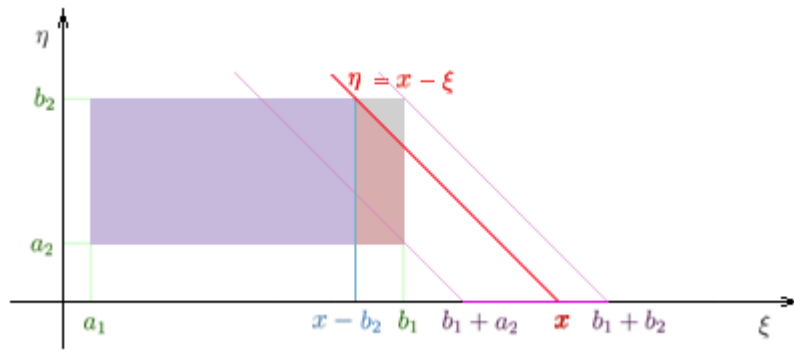


Плотность

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{a_1}^{x-b_2} \frac{\partial}{\partial x} f_1(\xi) d\xi + f_1(x - b_2) \frac{d(x - b_2)}{dx} + \\ &+ \int_{x-b_2}^{x-a_2} \frac{\partial}{\partial x} f_1(\xi) F_2(x - \xi) d\xi + \\ &+ f_1(x - a_2) F_2(x - (x - a_2)) \frac{d(x - a_2)}{dx} - \\ &- f_1(x - b_2) F_2(x - (x - b_2)) \frac{d(x - b_2)}{dx} = \\ &= 0 + f_1(x - b_2) + \int_{x-b_2}^{x-a_2} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi + 0 - f_1(x - b_2) = \\ &= \int_{x-b_2}^{x-a_2} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

Для третьего отрезка $[b_1 + a_2, b_1 + b_2]$ интегральная функция распределения будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{a_1}^{x-b_2} f_1(\xi) \int_{a_2}^{b_2} f_2(\eta) d\eta d\xi + \int_{x-b_2}^{b_1} f_1(\xi) \int_{a_2}^{x-\xi} f_2(\eta) d\eta d\xi = \\ &= \int_{a_1}^{x-b_2} f_1(\xi) d\xi + \int_{x-b_2}^{b_1} f_1(\xi) F_2(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$



Плотность

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \int_{a_1}^{x-b_2} \frac{\partial}{\partial x} f_1(\xi) d\xi + f_1(x-b_2) \frac{d(x-b_2)}{dx} + \\
 &+ \int_{x-b_2}^{b_1} \frac{\partial}{\partial x} f_1(\xi) F_2(x-\xi) d\xi + \\
 &+ f_1(b_1) F_2(x-b_1) \frac{db_1}{dx} - \\
 &- f_1(x-b_2) F_2(x-(x-b_2)) \frac{d(x-b_2)}{dx} = \\
 &= 0 + f_1(x-b_2) + \int_{x-b_2}^{b_1} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi + 0 - f_1(x-b_2) = \\
 &= \int_{x-b_2}^{b_1} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$