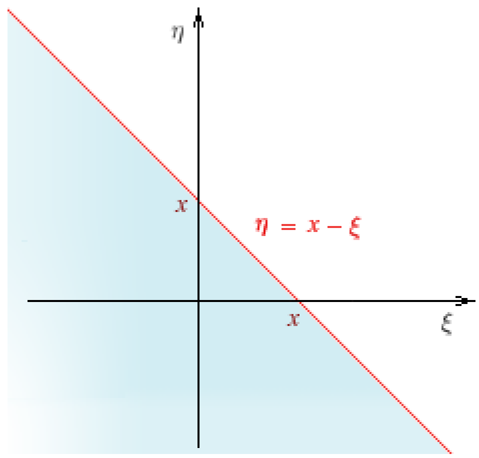
Сумма двух случайных величин

Если заданы две случайные величины с плотностями $f_1(x)$ и $f_2(x)$, интегралы которых $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно. Интегральная функция распределения $G(x)$ суммы таких случайных величин вычисляется по формуле:

$$G(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \int\limits_{-\infty}^{x-\xi} f_2(\eta)\, d\eta\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) F_2(x-\xi)\, d\xi.$$



Если плотность является кусочно-заданной функцией, то формула разобьётся на несколько интегралов, пределы которых будут соответствовать областям определения каждого куска функции. Плотность $g(x)$ суммы можно вычислить, дифференцируя $G(x)$, применив формулу дифференцирования под знаком интеграла

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,t)\, dt = \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt + f\big(x, \psi(x)\big) \frac{d\psi(x)}{dx} - f\big(x, \varphi(x)\big) \frac{d\varphi(x)}{dx},$$

Если пределы интегрирования $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ постоянны, то их производные по x равны нулю, поэтому второе и третье слагаемые в правой части нулевые, и формула принимает вид

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{\varphi}^{\psi} f(x,t)\, dt = \int\limits_{\varphi}^{\psi} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\, dt.$$

Отсюда

$$g = \frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) F_2(x-\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \Big(f_1(\xi) F_2(x-\xi) \Big)\, d\xi =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) \frac{\partial}{\partial x} F_2(x-\xi)\, d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\, d\xi.$$