Сумма трёх экспоненциально распределённых случайных величин с одинаковой средней частотой

Так как нам известна плотность суммы двух экспоненциально распределённых случайных величин, мы можем получить подобную формулу для трёх таких случайных величин тем же путём.

Сначала получим формулу для интегральной функции распределения.

$$G(x) = \mathbb{P}\{\zeta < x\} = \mathbb{P}\{\xi + \eta < x\} = \int\limits_0^x f_2(\xi) \int\limits_0^{x-\xi} f_1(\eta)\, d\eta\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda^2 \xi e^{-\lambda\xi} \int\limits_0^{x-\xi} \lambda e^{-\lambda\eta}\, d\eta\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda^2 \xi\, e^{-\lambda\xi} \cdot \left(1 - e^{-\lambda(x-\xi)}\right) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda^2 \xi\, e^{-\lambda\xi}\, d\xi - \int\limits_0^x \lambda^2 \xi\, e^{-\lambda x}\, d\xi =$$

$$= \left(1 - (\lambda\xi + 1)e^{-\lambda\xi}\right)_0^x - \lambda^2 e^{-\lambda x} \cdot \frac{\xi^2}{2}\bigg|_0^x =$$

$$= 1 - (\lambda x + 1)e^{-\lambda x} - \frac{1}{2}\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x} =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x}\left(1 + \lambda x + \frac{1}{2}\lambda^2 x^2\right).$$

Теперь подобные выкладки сделаем для плотности $g(x)$.

$$g(x) = \int\limits_0^x f_2(\xi) f_1(x-\xi)\, d\xi = \int\limits_0^x \lambda^2 \xi\, e^{-\lambda\xi}\, \lambda e^{-\lambda(x-\xi)}\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda^3 \xi\, e^{-\lambda x}\, d\xi = \lambda^3 e^{-\lambda x} \int\limits_0^x \xi\, d\xi = \lambda^3 e^{-\lambda x}\, \frac{\xi^2}{2}\bigg|_0^x =$$

$$= \frac{1}{2}\,\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x}.$$

Сумма нескольких экспоненциально распределённых случайных величин с одинаковой средней частотой

Для начала получим формулы для четырёх случайных величин

$$g(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{2}\lambda^3\xi^2\, e^{-\lambda\xi}\,\lambda e^{-\lambda(x-\xi)}\,d\xi = \frac{1}{2}\lambda^4 e^{-\lambda x}\int\limits_0^x \xi^2\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\cdot 3}\lambda^4 x^3 e^{-\lambda x}.$$

Для остальных применим метод математической индукции. Предположим, что для n случайных величин верно

$$g(x) = \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n x^{n-1}e^{-\lambda x}.$$

Тогда для $(n+1)$ случайных величин будет

$$g(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{(n-1)!}\lambda^n\xi^{n-1}e^{-\lambda\xi}\cdot\lambda e^{-\lambda(x-\xi)}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\lambda^{n+1}e^{-\lambda x}\int\limits_0^x \xi^{n-1}\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{n!}\lambda^{n+1}x^n e^{-\lambda x}.$$

Что доказывает предположение.

Нетрудно убедиться, что интегральная функция при такой плотности будет

$$G(x) = 1 - e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Такое распределение называется распределением Эрланга.