Сумма двух экспоненциально распределённых случайных величин

Пусть есть две случайные величины с интегральными функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, при этом

$$F_1(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}; \qquad F_2(x) = 1 - e^{-\lambda_2 x};$$

Соответственно функции плотности этих распределений будут выглядить соответственно так:

$$f_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}; \qquad f_2(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

Интегральная функция суммы этих случайных величин такова

$$G(x) = \mathbb{P}\{\zeta < x\} = \mathbb{P}\{\xi + \eta < x\} = \int\limits_0^x f_1(\xi) \int\limits_0^{x-\xi} f_2(\eta)\, d\eta\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 \xi} \int\limits_0^{x-\xi} \lambda_2 e^{-\lambda_2 \eta}\, d\eta\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 \xi} \cdot \left(1 - e^{-\lambda_2 (x-\xi)}\right) d\xi =$$

$$= \int\limits_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_1 \xi}\, d\xi - \int\limits_0^x \lambda_1 e^{-\lambda_2 x + \xi(\lambda_2 - \lambda_1)}\, d\xi =$$

$$= -e^{-\lambda_1 \xi}\Big|_0^x - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\xi}\Big|_0^x =$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} - 1\right) =$$

$$= 1 - e^{-\lambda_1 x} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right) =$$

$$= 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 x} - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x}.$$

Плотность $g(x)$ является производной от $G(x)$:

$$g(x) = -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 x} + \frac{\lambda_2 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 x} =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}\right).$$

Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$G(x) = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda \xi}\, d\xi - \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda x + \xi(\lambda - \lambda)}\, d\xi = -e^{-\lambda \xi}\Big|_0^x - \lambda e^{-\lambda x} \xi\Big|_0^x =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} = 1 - (\lambda x + 1) e^{-\lambda x}.$$

Откуда

$$g(x) = \lambda(\lambda x + 1) e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} = \lambda^2 x\, e^{-\lambda x}.$$