Квадрат нормально распределённой случайной величины

Нормально распределённая случайная величина с нулевым математическим ожиданием имеет плотность

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right),$$

где σ^2 — дисперсия. По формуле (2) плотность квадрата такой случайной величины

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left[\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(\sqrt{x})^2}{2\sigma^2}\right) + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(\frac{-(-\sqrt{x})^2}{2\sigma^2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)$$

Сумма двух квадратов нормально распределённых случайных величин

По формуле для плотности суммы двух независимых случайных величин

$$g(x) = \int\limits_0^x f_1(t)\, f_2(x-t)\ dt =$$

$$= \int\limits_0^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(\frac{-t}{2\sigma^2}\right)\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi(x-t)}}\exp\left(\frac{-(x-t)}{2\sigma^2}\right)\ dt =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}\sqrt{x-t}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2 2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)\int\limits_0^x \frac{2\, d\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} = \frac{2}{\sigma^2 2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)\int\limits_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{x-u^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)\arcsin\frac{u}{\sqrt{x}}\Bigg|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sigma^2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)\cdot\Big(\arcsin 1 - \arcsin 0\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2\pi}\exp\left(\frac{-x}{2`\sigma^2}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2\sigma^2}\exp\left(\frac{-x}{2\sigma^2}\right)$$

Полученная формула является плотностью экспоненциального распределения

$$\lambda e^{-\lambda x}, \quad \text{где } \lambda = \frac{1}{2\sigma^2}$$