

Сумма двух квадратов равномерно распределённых случайных величин

Две независимые случайные величины равномерно распределены на отрезке $[-1, 1]$, тогда их квадраты распределены на отрезке $[0, 1]$ с интегральной функцией $\sqrt{x}$ и плотностью $1/(2\sqrt{x})$. Сумма квадратов будет распределена на отрезке $[0, 2]$, при этом, по формуле для плотности суммы двух независимых случайных величин, заданных на отрезке $[0, 1]$ получим плотность для первой половины отрезка $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x f_1(t) f_2(x-t) dt = \\ &= \int_0^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-t}} dt = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{2d\sqrt{t}}{\sqrt{x-t}} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x}} \frac{du}{\sqrt{x-u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{u}{\sqrt{x}} \Big|_0^{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} (\arcsin 1 - \arcsin 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

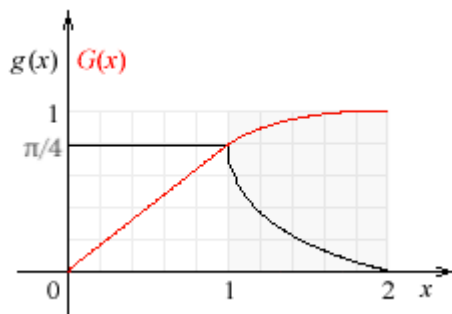
Таким образом, сумма квадратов двух независимых равномерно распределённых на отрезке $[-1, 1]$ случайных величин равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

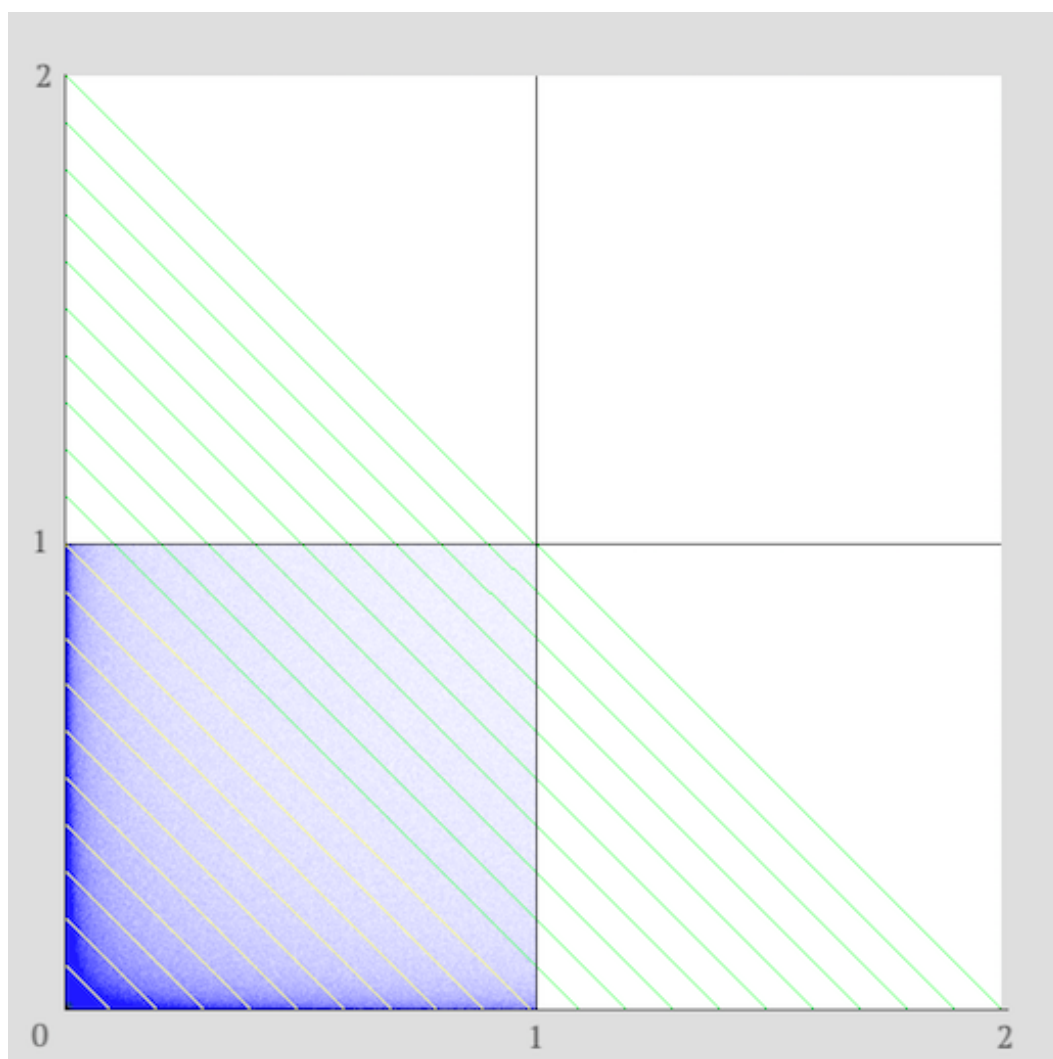
Для второй половины отрезка $[0, 2]$, а именно, для отрезка $[1, 2]$ плотность находится так же, но с другими пределами интегрирования:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_{x-1}^1 f_1(t) f_2(x-t) dt = \int_{x-1}^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x-t}} dt = \\ &= \frac{1}{2} \arcsin \frac{u}{\sqrt{x}} \Big|_{\sqrt{x-1}}^1 = \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \arcsin \left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right) = \frac{\pi}{4} - \arccos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right). \end{aligned}$$

Интегрируя плотность, получается интегральная функция распределения.

$$G(x) = \begin{cases} x \frac{\pi}{4}, & \text{при } x \in [0, 1], \\ x \frac{\pi}{4} - x \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1}, & \text{при } x \in [1, 2]. \end{cases}$$





На этом рисунке показан результат компьютерного моделирования двумерной случайной величины, каждая из её составляющих является квадратом равномерного распределения. Вдоль жёлтых линий находятся точки, у которых сумма двух координат одна и та же. Так вдоль линии, соединяющей точки $(0, 1)$ и $(1, 0)$, у всех точек сумма координат равна 1. Видно, что ближе к нулю плотность точек выше. Между любыми двумя соседними жёлтыми линиями содержится одно и то же число точек за счёт того, что в полосах меньшей площади выше плотность. Это показывает, что распределение суммы равномерно от нуля до 1, а затем плотность сразу убывает до нуля в точке 2. Наименьшая сумма двух координат равна нулю в левой нижней точке $(0, 0)$, наибольшее значение этой суммы, равное двум, в точке $(1, 1)$.