Квадрат случайной величины

Случайная величина имеет интегральную функцию $F(x)$ и плотность $f(x)$. Квадратом случайной величины будет новая случайная величина, каждое значение которой η равно ξ^2, где ξ — значение исходной случайной величины. Нужно выразить интегральную функцию $G(x)$ и плотность $g(x)$ новой случайной величины через $F(x)$ и $f(x)$.

$$G(x) = p\{\eta < x\} = p\{\xi^2 < x\} = p\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) \tag{1}$$

$$g(x) = \frac{dG(x)}{dx} = \frac{dF(\sqrt{x}))}{dx} - \frac{dF(-\sqrt{x}))}{dx} = f(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} - f(-\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\Big) \tag{2}$$

Квадрат случайной величины, равномерно распределённой от 0 до 1

Если случайная величина равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$, то её интегральная функция $F(x) = x$, при $0 < x < 1$. Для остальных значений аргумента $F(x) = 0$, при $x \leq 0$ и $F(x) = 1$, при $x \geq 1$. Тогда интегральная функция квадрата этой случайной величины, изменяющегося от 0 до 1, по формуле (1) будет такой:

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}.$$

Откуда плотность

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Квадрат случайной величины, равномерно распределённой от -1 до +1

Если случайная величина равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$, то её интегральная функция $F(x) = (x + 1)/2$, при $-1 < x < 1$, тогда интегральная функция квадрата этой случайной величины, изменяющегося от 0 до 1, по формуле (1) будет такой:

$$G(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = \frac{\sqrt{x}+1}{2} - \frac{-\sqrt{x}+1}{2} = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1}{2} = \sqrt{x}.$$

То есть, интегральная функция получилось такой же, следовательно и плотность та же

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$