

Вероятность возникновения заданного числа событий на временном интервале заданной длительности в зависимости от непрерывности этого интервала

Пусть есть предопределённый ход возникновения событий, которые происходят через равные промежутки времени t . Какова вероятность того, что на случайном непрерывном промежутке длиной $t/2$ произойдёт ровно одно событие?

Поскольку начало промежутка τ случайно, то эта точка τ может с равной вероятностью оказаться на любой точке отрезка времени между двумя событиями. То есть, если τ окажется ближе к концу отрезка, чем $t/2$, то на этом отрезке $[\tau, \tau + t/2]$ произойдёт ровно одно событие. Если дальше — то ни одного. Поскольку длина отрезка между событиями равна t , то вероятность оказаться во второй половине будет $1/2$. То есть с вероятностью $1/2$ произойдёт ровно одно событие и с той же вероятностью не произойдёт ни одного события.

Если теперь рассмотреть два независимых непересекающихся отрезка длиной $t/4$, то получим, что ровно одно событие на этих двух отрезках может произойти либо при одном событии на первом отрезке и ни одном событии на втором, либо при ни одном событии на первом и одном событии на втором. То есть, чтобы вычислить вероятность такого исхода нужно просуммировать вероятности возникновения первого и второго случая. В свою очередь, вероятность того, что одно событие случится на одном отрезке и ни одного не случится на втором, равно произведению этих вероятностей. Вероятность того, что событие произойдёт, равно $1/4$, а вероятность того, что событий не будет — $3/4$. Таким образом, вероятность ровно одного события за время $t/2$, если временной интервал длиной $t/2$ состоит из двух равных непрерывных отрезков времени длиной по $t/4$ каждый, будет равна $2 \cdot 3/4 \cdot 1/4 = 6/16 = 3/8$. Так же вероятность ни одного события будет равна $3/4 \cdot 3/4 = 9/16$. А вероятность, ровно двух событий будет равна $1/4 \cdot 1/4 = 1/16$.

Если взять n отрезков длиной $t/(2n)$, то вероятность одного события будет равна $n \cdot 1/(2n) \cdot (1 - 1/(2n))^{(n-1)}$.

Вероятность же ни одного события будет равна $(1 - 1/(2n))^n$, что при $n \rightarrow \infty$ стремится к $e^{-1/2}$.

Вероятность того, что случится ровно k событий будет

$$C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k},$$

при $n \rightarrow \infty$ будет предел

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \times \dots \times \frac{(n-k+1)}{n} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k} = \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{k!} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \times \dots \\ & \quad \dots \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-k+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{n-k} = \\ &= \frac{1}{2^k k!} \cdot e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Если же рассмотреть два промежутка времени, один из которых равен tv , где v из $[0, 1/4]$, а второй $t/2 - tv$, то вероятность ровно одного события на них будет равна

$$\begin{aligned} & v \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + v\right) + (1 - v) \cdot \left(\frac{1}{2} - v\right) = \\ & = v \cdot \left(\frac{1}{2} + v\right) + (1 - v) \cdot \left(\frac{1}{2} - v\right) = \\ & = \frac{v}{2} + v^2 + \frac{1}{2} - v - \frac{v}{2} + v^2 = \\ & = 2v^2 + \frac{1}{2} - v. \end{aligned}$$

При $v = 0$ вероятность равна $1/2$. При $v = 1/4$ вероятность равна

$$2/16 + 1/2 - 1/4 = (2 + 8 - 4)/16 = 6/16 = 3/8,$$

это минимум по v из $[0, 1/4]$.

Вероятность ни одного события равна

$$\begin{aligned} & (1 - v) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + v\right) = \\ & = \left(\frac{1}{2} + v - \frac{1}{2}v - v^2\right) = \\ & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}v - v^2. \end{aligned}$$

При $v = 0$ вероятность равна $1/2$. При $v = 1/4$ вероятность равна

$$1/2 + 1/8 - 1/16 = (8 + 2 - 1)/16 = 9/16,$$

это максимум по v из $[0, 1/4]$.

Вероятность двух событий равна

$$v \cdot \left(\frac{1}{2} - v\right) = \frac{v}{2} - v^2.$$

При $v = 0$ вероятность равна 0. При $v = 1/4$ вероятность равна $1/16$, это максимум по v из $[0, 1/4]$.

Если рассмотреть вероятность на промежутке времени at , то вероятность одного события на непрерывном промежутке времени длительностью at/n будет a/n .

Тогда вероятность того, что произойдёт ровно k событий будет

$$C_n^k \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k}$$

при стремлении n к бесконечности

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a},$$

Это не что иное, как функция вероятности Пуассона. Параметр a , задающий суммарную длину временного отрезка относительно времени t , на котором вычисляется вероятность k событий, по сути и есть среднее число событий. Так как за время t происходит ровно одно событие, то за время at должно происходить в среднем a событий.