

Независимость вероятности Пуассона от непрерывности промежутка времени

Вероятность того, что при Пуассоновом процессе со средней частотой λ событий в единицу времени на промежутке времени заданной длины t произойдёт ровно k событий вычисляется так:

$$P(k, \lambda, t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Найдём вероятность того, что ровно k событий произойдёт в сумме на двух разных промежутках времени t_1 и t_2 таких, что их суммарная продолжительность равна t . Это означает, что $k_1 + k_2 = k$, где k_1 и k_2 — числа событий, случившихся на первом и втором промежутках соответственно. При этом на одном из интервалов может не произойти и одного события, тогда k событий должно произойти на другом промежутке времени. Используя вероятность Пуассона запишем

$$\begin{aligned} P(k, \lambda, t_1, t_2) &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{(\lambda t_1)^i}{i!} e^{-\lambda t_1} \cdot \frac{(\lambda t_2)^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda t_2} \right) = \\ &= \sum_{i=0}^k \left(\frac{(\lambda t_1)^i (\lambda t_2)^{k-i}}{i! (k-i)!} e^{-\lambda t_1 - \lambda t_2} \right) = \lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2)} \sum_{i=0}^k \frac{t_1^i t_2^{k-i}}{i! (k-i)!} = \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i! (k-i)!} t_1^i t_2^{k-i} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{k!} \sum_{i=0}^k C_k^i t_1^i t_2^{k-i} = \\ &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda(t_1+t_2)}}{k!} (t_1 + t_2)^k = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} = P(k, \lambda, t). \end{aligned}$$

Таким образом, вероятность Пуассона зависит только от суммарной продолжительности временных интервалов вне зависимости от того, смежные это интервалы или расположенные изолированно.

Математическое ожидание распределения Пуассона

Если много раз повторять опыт с подсчётом числа событий на отрезках времени одной и той же продолжительности, то разные числа будут получаться с частотой, пропорциональной вероятности этих чисел. Тогда среднее значение можно вычислить как сумму этих чисел, помноженных на их вероятности:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} t^{k-1}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda t e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \lambda t e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = \lambda t. \end{aligned}$$

Здесь было использовано то, что бесконечная сумма в итоге получилась совпадающей с рядом Тейлора для $e^{\lambda t}$.

Таким образом, вне зависимости от того, непрерывен промежуток времени t , или является суммой отдельных изолированных временных интервалов, среднее число событий на этом промежутке будет λt .