

Моделирование нормально распределённой случайной величины методом Бокса–Мюллера

Метод Бокса–Мюллера основан на создании модели не одной, а двух независимых нормально распределённых случайных величин. При этом используются две независимые равномерно распределённые случайные величины на промежутке от 0 до 1.

Рассмотрим двумерную случайную величину (X, Y) , каждая составляющая которой распределена по нормальному закону Гаусса с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 . Тогда плотность в точке (x, y) выражается формулой

$$f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^2 2\pi} e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}},$$

где R — расстояние от точки (x, y) до начала координат. То есть, плотность для всех точек вдоль окружности с радиусом r одинакова.

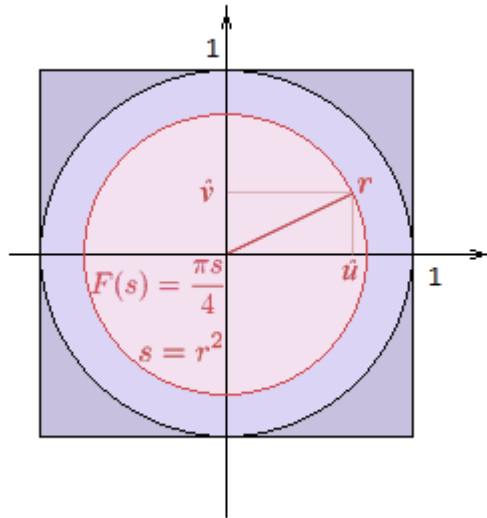
Так как сумма квадратов двух независимых гауссовых случайных величин распределена по экспоненциальному закону с математическим ожиданием $2\sigma^2$, то значения x и y можно получать из формул

$$x = R \cos \phi, \quad y = R \sin \phi, \quad \text{где } R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln u}, \quad \phi = 2\pi v.$$

Здесь u и v — значения двух равномерно распределённых случайных величин на промежутке от 0 до 1. Квадрат радиуса r получен по формуле метода обратной функции, при этом аргумент логарифма заменён с $(1 - u)$ на u , поскольку значения $(1 - u)$ распределены так же, как и u .

Поскольку значения последовательности значений равномерно распределённой случайной величины не зависят от предыдущих значений, то для получения значений u и v используется один генератор случайных значений. Таким образом, из двух значений равномерно распределённой случайной величины получается сразу два значения нормально распределённой случайной величины. Если математическое ожидание моделируемой случайной величины не нулевое, то каждое полученное случайное значение складывается с этим математическим ожиданием.

Поскольку расчёты значений синуса и косинуса достаточно вычислительно затратны, как правило, вычисляется значение только одной функции, например $\sin \phi$, а значение второй получается извлечением корня из разности единицы и квадрата вычисленного значения: $\cos \phi = \sqrt{1 - \sin^2 \phi}$, при этом знак косинуса берётся отрицательным, если $\phi \in [\pi/2, 3\pi/2]$.



Впоследствии этот метод был усовершенствован так, чтобы избавиться от вычисления тригонометрических функций. Вместо u и v берутся значения $\hat{u} = 2u - 1$ и $\hat{v} = 2v - 1$, которые будут распределены от -1 до $+1$, образуя двумерную равномерно распределённую случайную величину. Значения этой двумерной случайной величины, делённые на квадратный корень из суммы их квадратов, принимаются за косинус и синус угла ϕ .

$$\cos \phi = \frac{\hat{u}}{\sqrt{s}}, \quad \sin \phi = \frac{\hat{v}}{\sqrt{s}} \quad \text{где } s = \hat{u}^2 + \hat{v}^2.$$

Очевидно, что в каждой точке квадрата, на котором задана такая двумерная случайная величина, плотность будет одинаковой и равной $1/4$. То есть, угол ϕ , вычисляемый как $\arctg((\hat{v}/\hat{u}))$ с учётом знаков числителя и знаменателя, будет равномерно распределён от 0 до 2π вдоль окружности радиуса $r = \sqrt{s}$,

где $s \leq 1$. Для больших значений радиуса, окружность будет пересекать квадрат, на котором изменяются значения $(\hat{u}, \hat{v})$ двумерной случайной величины, поэтому радиусы, превосходящие единичный, не рассматриваются. Если $s > 1$, то это значение пропускается и вычисляется следующее.

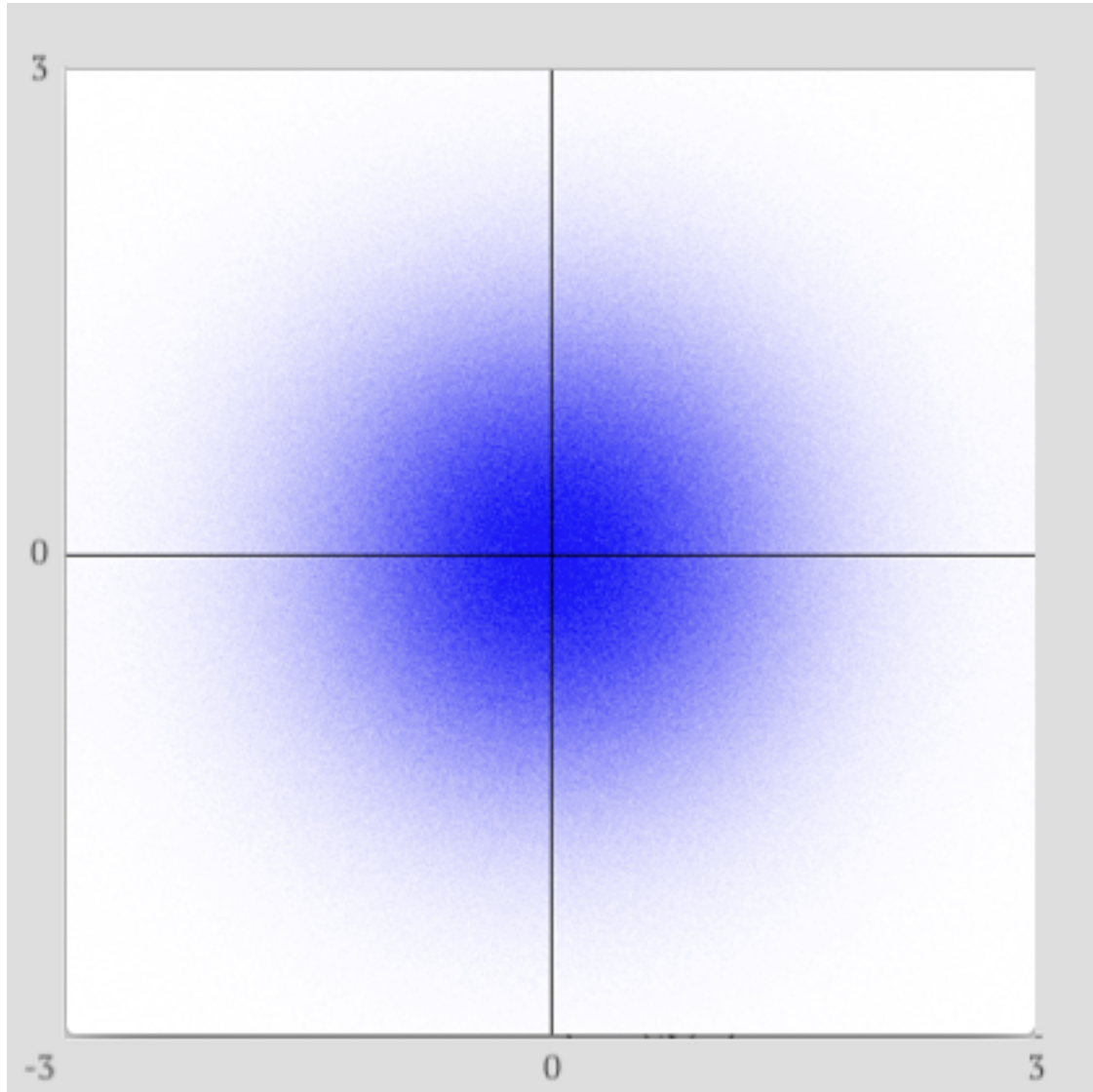
Значение s является суммой квадратов двух независимых равномерно распределённых случайных величин. Поскольку сумма квадратов двух равномерно распределённых случайных величин, заданных от -1 до $+1$, равномерно распределена на первой половине отрезка $[0, 2]$, то можно вычислить R , как корень из экспоненциально распределённой случайной величины с математическим ожиданием $1/2\sigma^2$, получаемой из s по формуле $R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln s}$. Таким образом, значения x и y двух независимых нормально распределённых случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2 будут вычисляться по формулам

$$x = R\hat{u}, \quad y = R\hat{v},$$

$$\text{где } R = \sqrt{-2\sigma^2 \ln s}, \quad \hat{R} = \frac{R}{\sqrt{s}}, \quad s = \hat{u}^2 + \hat{v}^2, \quad \hat{u} = 2u - 1, \quad \hat{v} = 2v - 1,$$

а u и v — равномерно распределённые на отрезке $[0, 1]$ случайные величины, вычисляемые встроенными в вычислительную среду функциями.

В этом методе доля используемых вычисленных пар (u, v) составляет отношение площади круга единичного радиуса к его описанному квадрату, равное $\pi/4$, что с точностью до третьего знака составляет 0.785. На деле, как правило, потери времени от неиспользованных вычисленных значений оказываются меньше, чем потери от вычисления синуса или косинуса.



На этом рисунке представлен результат компьютерного моделирования усовершенствованным методом Бокса-Мюллера двумерной нормально распределённой случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Большинство значений по каждой координате лежит между $[-3, 3]$, а именно 99,73%.