

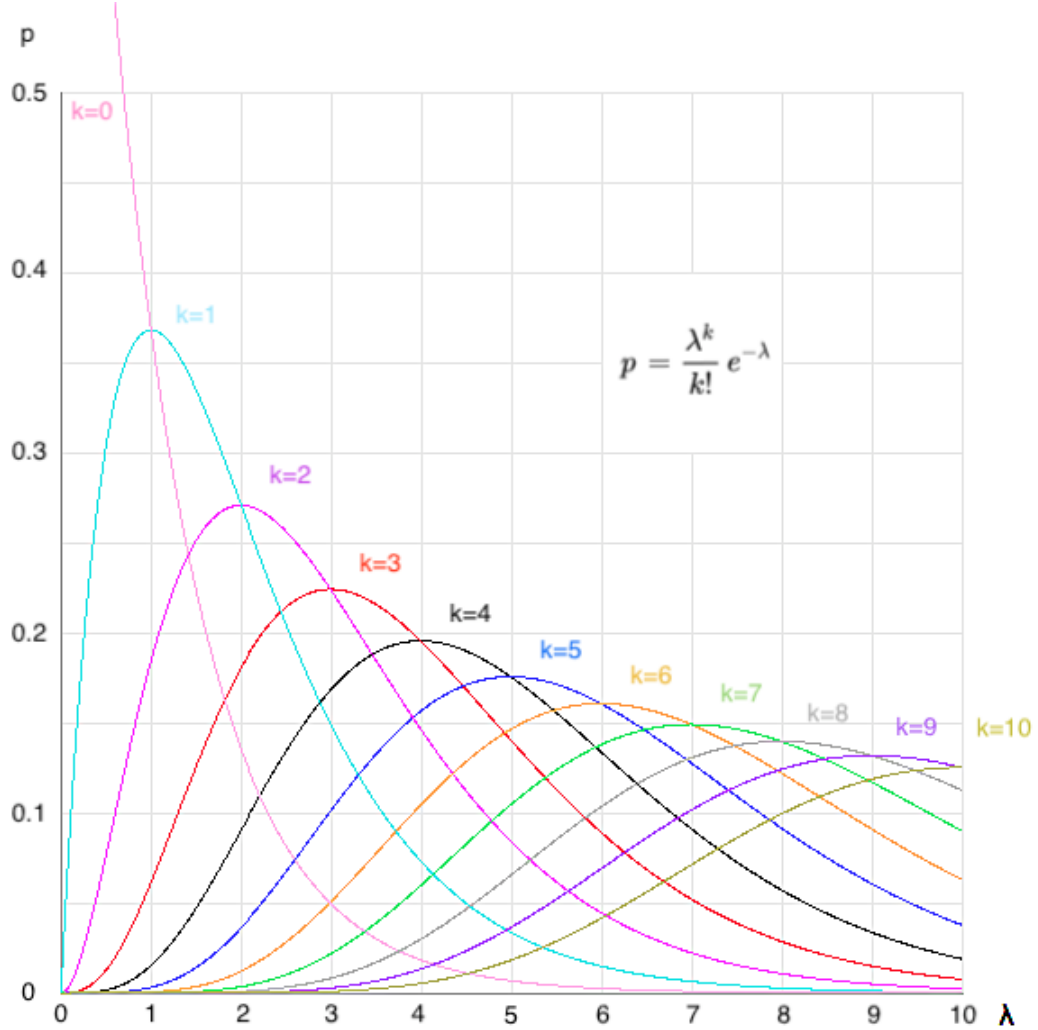
Максимальные значения распределения Пуассона

Функция вероятности Пуассона выглядит так:

$$p(\lambda, k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

где $p(\lambda, k)$ — вероятность того, что на некотором временном промежутке произойдёт ровно k событий, а λ — среднее число событий на таком промежутке. Пусть k постоянно. (Такая функция от λ будет плотностью частного случая распределения Эрланга.) Каково значение λ такое, что $p(\lambda, k)$ принимает наибольшее значение? Дифференцируя $p(\lambda, k)$ по λ и приравнявая производную к нулю, получим

$$\frac{1}{k!} (k\lambda^{k-1}e^{-\lambda} - \lambda^k e^{-\lambda}) = \frac{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}}{k!} (k - \lambda) = 0. \quad \text{Откуда } \lambda = k.$$



Теперь пусть λ постоянно. При каком k вероятность $p(\lambda, k)$ достигает наибольшего значения? Мы не можем взять производную по k , поскольку k принимает только целые положительные значения, и функция $p(\lambda, k)$ не является непрерывной по k . Рассмотрим разность $\delta_p(k) = p(\lambda, k) - p(\lambda, k-1)$. Если при некотором k^* выполняются неравенства $\delta_p(k^*) > 0$ и $\delta_p(k^*+1) < 0$, то $p(\lambda, k^*)$ есть максимум.

$$\delta_p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{k} - 1 \right).$$

Дробь перед скобкой всегда положительна при положительном k . Откуда $\delta_p(k) = 0$ при $k = \lambda$; $\delta_p(k) > 0$ при $k < \lambda$; $\delta_p(k) < 0$ при $k > \lambda$.

Следовательно $p(\lambda, k) = p(\lambda, k-1)$ при $k = \lambda$ и это наибольшее значение $p(\lambda, k)$. Также $p(\lambda, k)$ возрастает при $k < \lambda - 1$ и убывает при $k > \lambda$.