

Закон Литтла

Пусть в систему массового обслуживания поступают N заявок в течение отрезка времени $[0, T]$. Некоторая часть заявок за время T будут обслужены и покинут систему, другая часть может оставаться в системе на момент времени T . Пусть каждая i -я заявка к моменту времени T находилась в системе промежуток времени w_i . Суммарное время S , проведённое всеми заявками в системе вычисляется так:

$$S = \sum_{i=1}^N w_i.$$

Среднее время нахождения одной заявки в системе за промежуток времени от 0 до T является отношением суммарного времени S к общему числу заявок N , поступивших в систему за это время: $W = S/N$. Откуда $S = WN$. С другой стороны, суммарное время S можно вычислить другим способом. В каждый момент времени τ на промежутке времени $[0, T]$ в системе находится конечное число $n(\tau)$ заявок. Очевидно $0 \leq n(\tau) \leq N$. Функция $n(\tau)$ не является непрерывной и имеет k точек разрыва на $[0, T]$, где $k \leq 2N$. Пусть τ_j и τ_{j+1} — соседние точки непрерывности, и $\tau_{j+1} - \tau_j = t_j$. Можно положить, что $0 = \tau_0$, $T = \tau_{k+1}$. Пусть n_j — число заявок, находящихся в системе на промежутке времени t_j . Тогда суммарное время, проведённое заявками в системе за время от 0 до T , будет

$$\sum_{j=0}^k n_j t_j = S.$$

Среднее число L заявок в системе можно вычислить, разделив суммарное время, проведённое всеми заявками в системе, на промежуток времени T .

$$L = \frac{\sum_{j=0}^k n_j t_j}{\sum_{j=0}^k t_j} = \frac{S}{T} = \frac{WN}{T}.$$

Обозначим за λ среднее число заявок, поступивших в систему за единицу времени: $\lambda = N/T$. Эта величина λ называется *интенсивностью (или мощностью) входящего потока*. В итоге мы получили формулу Литтла

$$L = \lambda W.$$

Таким образом, на промежутке времени T среднее число заявок, находящихся в системе, равно среднему числу заявок, поступающих в систему за единицу времени, умноженному на среднее время, проводимое одной заявкой в системе.

Если система массового обслуживания стационарна, то есть, среднее число заявок, поступающее в систему за единицу времени и среднее время обслуживания каждой заявки не изменяется, и при этом производительность системы превосходит мощность входящего потока, то среднее число заявок, находящихся в системе, и среднее время нахождения заявки в системе не зависит от промежутка времени T .