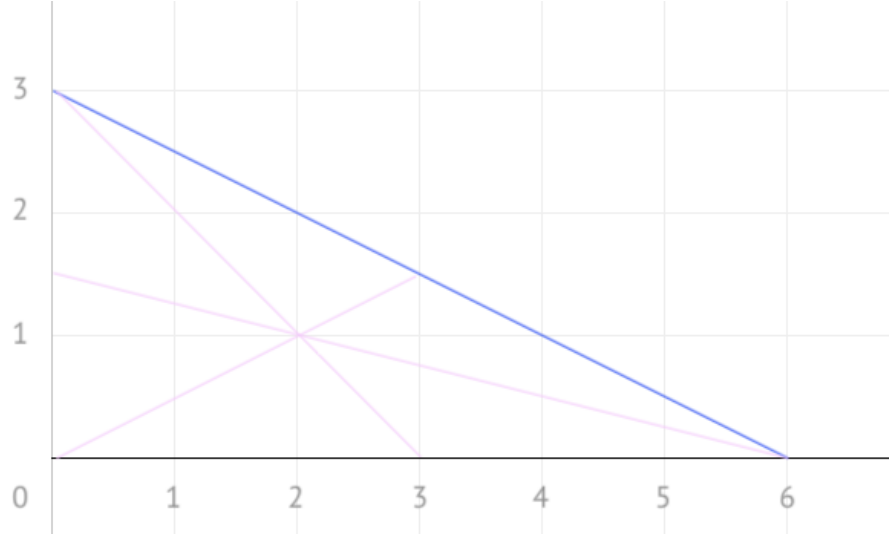


Вычисление центра тяжести

Пусть нужно вычислить центр тяжести треугольника, ограниченного осями координат и прямой $f(x) = 3 - x/2$.



Вычисляем момент первого порядка по оси x относительно начала координат

$$M = \int_0^6 x \cdot f(x) dx = \int_0^6 \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left.\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3 \cdot 2}\right|_0^6 = \frac{3 \cdot 6 \cdot 6}{2} - \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{6} = 3 \cdot 18 - 36 = 18.$$

Вычисляем площадь

$$S = \int_0^6 f(x) dx = \int_0^6 \left(3 - \frac{x}{2}\right) dx = \left.\left(3x - \frac{x^2}{2 \cdot 2}\right)\right|_0^6 = 3 \cdot 6 - \frac{6 \cdot 6}{4} = 18 - 9 = 9.$$

Координата x центра масс

$$x_c = \frac{M}{S} = \frac{18}{9} = 2.$$

Задача о торговле несохраняемого товара при случайном спросе

Продавец каждый день закупает одно и то же число x единиц товара по цене q денежных единиц за единицу товара. Продаёт его по цене p денежных единиц за единицу товара. Если в конце дня товар остаётся непроданным, то продавец сдаёт его на переработку по остаточной цене r денежных единиц за единицу товара. Дневной спрос на товар случаен с функцией распределения $F(z)$ и плотностью $f(z)$, на промежутке от a до b .

Каков должен быть размер ежедневных закупок x , чтобы прибыль стала наибольшей?

Ожидаемая ежедневная прибыль H вычисляется по формуле

$$H = H_s F(x) + H_l (1 - F(x)),$$
$$H_s = py - qx + r(x - y), \quad H_l = px - qx,$$

где

H_s — прибыль при спросе y меньше, чем дневной запас ($y < x$),

H_l — прибыль, когда спрос y больше или равен дневному запасу ($y \geq x$).

Среднее значение спроса $\bar{y}$, когда $y < x$, вычисляется по формуле

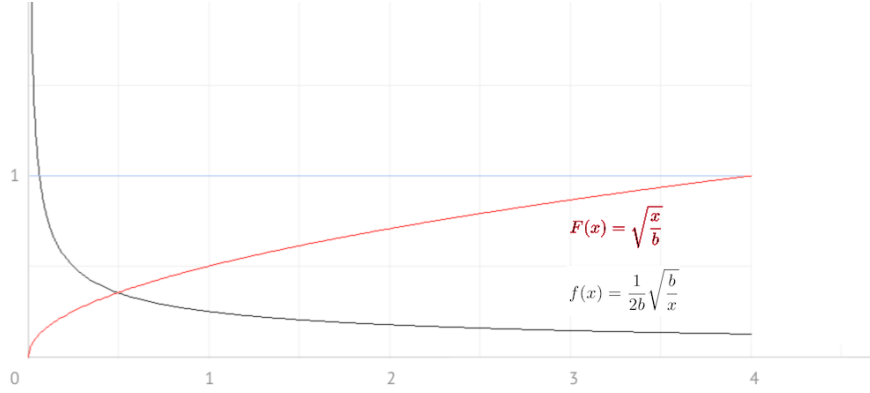
$$\bar{y} = \frac{\int_a^x y f(y) dy}{\int_a^x f(y) dy} = \frac{I(x)}{F(x)}.$$

Здесь числитель обозначен за $I(x)$.

По сути, вычисление среднего значения $\bar{y}$ это то же, что вычисление центра тяжести в механике. Вычисляется момент первого порядка, а затем делится на площадь.

$$\begin{aligned} H &= (p\bar{y} + r(x - \bar{y}))F(x) + px(1 - F(x)) - qx = \\ &= (p - r)I(x) + (r - p)xF(x) + (p - q)x. \end{aligned}$$

Пример.



Пусть спрос таков, что $a = 0$, $b = 4$, $F(x) = \sqrt{\frac{x}{b}}$, $f(x) = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{b}{x}}$,

тогда

$$I(x) = \int_0^x t \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{b}{t}} dt = \frac{1}{2\sqrt{b}} \int_0^x \sqrt{t} dt = \frac{2\sqrt{t^3}}{3 \cdot 2\sqrt{b}} \Big|_0^x = \frac{\sqrt{x^3}}{3\sqrt{b}}.$$

Отсюда прибыль

$$\begin{aligned} H &= (p - r)I(x) + (r - p)xF(x) + (p - q)x = \\ &= (p - r) \frac{\sqrt{x^3}}{3\sqrt{b}} + (r - p) \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{b}} + (p - q)x = \\ &= \frac{2}{3}(r - p) \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{b}} + (p - q)x. \end{aligned}$$

Продифференцируем прибыль H и, приравняв производную к 0, найдём наилучший заказ x .

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dx} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{(r - p)}{\sqrt{b}} \cdot \frac{3}{2} \sqrt{x} + p - q; \\ \frac{(r - p)}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{x} + p - q &= 0; \\ x &= b \left(\frac{p - q}{p - r} \right)^2. \end{aligned}$$

Пусть теперь левая граница спроса отлична от нуля. То есть, левая граница спроса будет равна a , правая граница будет равна b , а ширина изменения спроса станет $b - a$. Интегральная и плотностная функции будут таковы:

$$F(x) = \sqrt{\frac{x - a}{b - a}}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(b - a)(x - a)}}.$$

$$I(x) = \frac{1}{2\sqrt{(b - a)}} \int_a^x \frac{t}{\sqrt{(t - a)}} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{(b-a)}} \left(\int_a^x \frac{t-a}{\sqrt{t-a}} dt + \int_a^x \frac{a}{\sqrt{t-a}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{(b-a)}} \left(\int_a^x \sqrt{t-a} dt + a \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t-a}} dt \right) = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{(b-a)}} \left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{(t-a)^3} \Big|_a^x + 2a\sqrt{t-a} \Big|_a^x \right) = \\
&= \frac{\sqrt{x-a}}{2 \cdot \sqrt{(b-a)}} \left(\frac{2}{3} \cdot (x-a) + 2a \right) = \\
&= \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \left(\frac{1}{3} \cdot (x-a) + a \right) = \\
&= \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot a \right).
\end{aligned}$$

Выпишем уравнение прибыли

$$\begin{aligned}
H &= (p-r)I(x) + (r-p)xF(x) + (p-q)x = \\
&= (p-r)\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot a \right) - (p-r)x\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + (p-q)x = \\
&= (p-r)\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \left(\frac{1}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot a - x \right) + (p-q)x = \\
&= -\frac{2}{3} \cdot (p-r) \cdot \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \cdot (x-a) + (p-q)x = \\
&= (p-q)x - \frac{2}{3} \cdot (p-r)\sqrt{\frac{(x-a)^3}{b-a}}.
\end{aligned}$$

Возьмём производную прибыли, приравняем её к нулю и найдём из этого уравнения наилучший дневной заказ x .

$$\frac{dH}{dx} = (p-q) - \frac{2}{3} \cdot (p-r) \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = (p-q) - (p-r) \cdot \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = 0.$$

$$\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} = \frac{p-q}{p-r}; \quad \frac{x-a}{b-a} = \left(\frac{p-q}{p-r} \right)^2;$$

$$x = a + (b-a) \left(\frac{p-q}{p-r} \right)^2.$$